Proceedings of IAM, V.4, N.2, 2015, pp.206-213

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ГАЗЛИФТНОГО ПРОЦЕССА*

Н.С. Мухтарова[1]

[1]Институт Систем Управления Национальной Академии Наук Азербайджана,
Баку, Азербайджан
e-mail: nazile.m@mail.ru

Резюме. Рассматривается математическая модель добычи нефти газлифтным способом, где движения газа и газожидкостной смеси (ГЖС) в соответствующих трубах описывается системой дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа. Далее исходное гиперболическое уравнение с помощью метода прямых аппроксимируются к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно объема газа, ГЖС и их давления. Для определения коэффициента гидравлического сопротивления λ_c используются статистические данные с каждой скважины (объем подаваемого газа на устье кольцевого пространства и объем ГЖС в конце подъемника). На основе этих данных составляется соответствующий квадратичный функционал и находится его градиент, который позволяет вычислить λ_c. На конкретном примере приводится сравнение полученного коэффициента гидравлического сопротивления λ_c со статистическим значением гидравлического сопротивления $\tilde{\lambda}_c$. Показывается, что λ_c отличается от реального $\tilde{\lambda}_c$ на 10^{-3} порядка.

Ключевые слова: газлифт, газожидкостная смесь, коэффициент гидравлического сопротивления, градиент функционала.

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35.

1. Введение

Как известно, [10, 11, 13, 14, 16] газлифтный способ для добычи нефти используется тогда, когда фонтанный способ невозможен из-за снижения пластового давления. Суть газлифтного способа заключается в том, что за счет энергии закачиваемого газа можно поднять на поверхность земли жидкость. При этом движения [7, 11, 15] закачиваемого газа в кольцевом пространстве и ГЖС в подъемнике описываются дифференциальными уравнениями в частных

---

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 23.06.2015

производных гиперболического типа. Для решения соответствующих задач оптимального управления используется метод прямых, который приводит исходную задачу к линейно - квадратичной задаче оптимального управления для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [8]. Однако, при этом существуют некоторые параметры, например, коэффициент вязкости нефти, вязкость газа, а также коэффициент гидравлического сопротивления λ_c в подъемнике, входящий в уравнение движения жидкости и газа, который влияет на скорость ГЖС в подъемнике. В настоящей работе остановимся на выборе параметра λ_c [2, 3], где, выбирая соответствующий квадратичный функционал строится на основе статистических данных (история скважины), т.е. минимизируется целевой квадратичной функционал [9]. По полученным формулам разработан алгоритм и составлена программа с использованием системы МАТЛАБ. Таким образом, предложенный алгоритм позволяет найти коэффициент гидравлического сопротивления λ_c, и результаты совпадают с точностью до 10^{-3} с данными с промысла.

2. Постановка задачи

Как известно [8], движение газожидкостной смеси в трубах описывается системой дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_i}{\partial t} = -\dfrac{c_i^2}{F_i}\dfrac{\partial Q_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q_i}{\partial t} = -F_i\dfrac{\partial P_i}{\partial x} - 2a_i Q_i \end{cases}, i = 1,\ 2, \tag{1}$$

где $P_i = P_i(x, t)$ – давление, Q_i - объем соответственно газа и газожидкостной смеси $i = 1,\ 2$, c_i - скорость звука в газе и ГЖС соответственно $i = 1,\ 2$; $2a_i = \dfrac{g}{\omega_c^i} + \dfrac{\lambda_c^i \omega_c^i}{2D_i}$, $i = 1,\ 2$; g, λ_c^i, $i = 1,\ 2$ - ускорение свободного падения и гидравлического сопротивления в газе и ГЖС соответственно; ω_c^i, $i = 1,\ 2$ - усредненная по сечению скорость движения смеси и газа в кольцевой зоне и подъемнике, D_i, $i = 1,\ 2$ – внутренние эффективные диаметры подъемника и кольцевого пространства, $F_i,\ i=1,2$ - площадь поперечного сечения насосно-компрессорных труб и является постоянной по осям. Применяя метод прямых [12] и обозначив $l=\frac{1}{2n}$, из (1) получим

$$\begin{cases} \dfrac{dP_k}{dt} = -\dfrac{c_i^2}{F_i l}(Q_k - Q_{k-1}) \\ \dfrac{dQ_k}{dt} = -\dfrac{F_i}{l}(P_k - P_{k-1}) - 2a_i Q_k \end{cases}, \qquad (2)$$

$$F_i = \begin{cases} F_1, & 0 < k \le n \\ F_2, & n < k \le 2n \end{cases}, \qquad c_i = \begin{cases} c_1, & 0 < k \le n \\ c_2, & n < k \le 2n. \end{cases}$$

Отметим что, при $k = n+1$ уравнение (2) имеет следующий вид

$$\begin{cases} \dfrac{dP_{n+1}}{dt} = -\dfrac{c_2^2}{F_2 l} Q_{n+1} + \dfrac{c_2^2}{F_2 l} Q_n + \dfrac{c_2^2}{F_2 l} Q_{pl}, \\ \dfrac{dQ_{n+1}}{dt} = -\dfrac{F_2}{l} P_{n+1} + \dfrac{F_2}{l} P_n - 2a_2 Q_{n+1} + \dfrac{F_2}{l} P_{pl}, \end{cases}$$

где Q_{pl}, P_{pl} - объемный расход и давление пласта на дне скважины.

После некоторых преобразований системы (2) можно привести к виду

$$\dot{x} = A(\lambda_c)x + Bu + V, \qquad (3)$$

с начальным условием

$$x_0 = \left[P_1^0, Q_1^0, ..., P_{2n}^0, Q_{2n}^0\right]', \qquad (4)$$

где x_0 исходное положение скважины и $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$, $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$, $V = \lfloor v_{ij} \rfloor$,

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{11}, & \text{если} \quad i = j \quad и \quad 1 \le i \le n, \\ a_{12}, & \text{если} \quad i = j+1 \quad и \quad 1 \le i < n-1, \\ a_{22}, & \text{если} \quad i = j \quad и \quad n < i < 2n, \\ a_{21}, & \text{если} \quad i = j+1 \quad и \quad n-1 < j \le 2n-1, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

$$a_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{c_1^2}{F_1 l} \\ -\dfrac{F_1}{l} & 0 \end{bmatrix}, a_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{c_1^2}{F_1 l} \\ \dfrac{F_1}{l} & 0 \end{bmatrix}, a_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{c_2^2}{F_2 l} \\ -\dfrac{F_2}{l} & 0 \end{bmatrix}, a_{21} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{c_2^2}{F_2 l} \\ \dfrac{F_{21}}{l} & 0 \end{bmatrix},$$

$$b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{c_1^2}{F_1 l}, \quad \textit{если} \quad i=1, \ j=2, \\ \dfrac{F_1}{l}, \ \textit{если} \quad i=2, \quad j=1, \\ 0, \ \textit{в других случаях}, \end{cases} \quad v_{ij} = \begin{cases} \dfrac{c_2^2}{F_2 l}, \ \textit{если} \quad i=n+1, \ j=2, \\ \dfrac{F_2}{l}, \textit{если} \quad i=n+2, \quad j=1, \\ 0, \textit{в других случаях}, \end{cases}$$

$$x = \left[P_1, \quad Q_1, \quad P_2, \quad Q_2, \quad \ldots \quad ,P_n, \quad Q_n, \quad P_{n+1}, \quad Q_{n+1}, \quad \ldots \quad ,P_{2n}, \quad Q_{2n}\right]' .$$

Пусть имеем статистические данные, которые при заданных начальных объемах газа на выходе: дебит $\tilde{Q}_{2n}^i$, т.е. $\tilde{Q}_0^i$, и $\tilde{Q}_{2n}^i$ известны, $i = \overline{1, N}$, где N число испытаний [1, 7].

Требуется найти такие значения коэффициента гидравлического сопротивления λ_c [1, 5, 7], при которых система (3) будет описывать движение ГЖС в подъемнике наиболее близко к практике (адекватная математическая модель).

Для решения этой задачи строится целевая функция, требуется минимизировать функционал невязки

$$f(a_2(\lambda_c)) = \sum_{i=1}^{N} \left[\tilde{Q}_{2n}^i - Q_{2n}^i\right]^2 \tag{5}$$

Таким образом, задачи определения коэффициента гидравлического сопротивления λ_c сводятся к нахождению нуля соответствующей целевой функции.

3. Вычисление градиента функционала (5)

Общее решение уравнения (2) можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\sigma)} Bu d\sigma + \\ &+ \int_0^t e^{A(t-\sigma)} V d\sigma = e^{At}x_0 + A^{-1}(e^{At} - E)Bu + A^{-1}(e^{At} - E)V, \end{aligned} \tag{6}$$

где из уравнения (6) Q_{2n} имеет вид

$$Q_{2n} = J \cdot x(T), \tag{7}$$

здесь $J = [0, \ 0, \ 0, \ 0, \ \ldots, \ 1]$, E- единичная матрица.

Далее, подставив (6) и (7) в (5), имеем

$$f(a_2(\lambda_c)) = \sum_{i=1}^{N}\left[\widetilde{Q}_{2n}^{i} - J\cdot x(T)\right]^2 = \tag{8}$$
$$= \sum_{i=1}^{N}[\widetilde{Q}_{2n}^{i} - Je^{AT}x_0^i - JA^{-1}(e^{AT}-E)Bu - JA^{-1}(e^{AT}-E)V]^2.$$

Для решения исходной задачи оптимизации (3)-(5) находим градиент функционала $f(a_2(\lambda_c))$ и, приравнивая его к нулю, имеем

$$\frac{\partial f(a_2(\lambda_c))}{\partial a_2(\lambda_c)} = 2\sum_{i=1}^{N}(\widetilde{Q}_{2n}^{i} - Je^{AT}x_0 - A^{-1}(e^{AT}-E)Bu - JA^{-1}(e^{AT}-E)V)\times$$
$$\times\sum_{i=1}^{N}(-J(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\frac{T^k}{k!}(A(a_2(\lambda_c)))^{j-1}\frac{\partial A(a_2(\lambda_c))}{\partial a_2(\lambda_c)}(A(a_2(\lambda_c)))^{j-1})x_0^i -$$
$$-JA^{-1}\frac{\partial A(a_2(\lambda_c))}{\partial a_2(\lambda_c)}A^{-1}Bu -$$
$$-(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}J\frac{T^k}{k!}(A(a_2(\lambda_c)))^{j-1}\frac{\partial A(a_2(\lambda_c))}{\partial a_2(\lambda_c)}(A(a_2(\lambda_c)))^{j-1})Bu + \tag{9}$$
$$+JA^{-1}\frac{\partial A(a_2(\lambda_c))}{\partial a_2(\lambda_c)}A^{-1}V +$$
$$+J(-A^{-1}\frac{\partial A(a_2(\lambda_c))}{\partial a_2(\lambda_c)}A^{-1} +$$
$$(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}J\frac{T^{k+1}}{(k+1)!}(A(a_2(\lambda_c)))^{j-1}\frac{\partial A(a_2(\lambda_c))}{\partial a_2(\lambda_c)}(A(a_2(\lambda_c)))^{k-j})V) = 0.$$

Для решения нелинейного уравнения (9) определяем λ_c [1] в виде

$$\lambda_c = \frac{4a_2D}{\omega_c} + \frac{2Dg}{\omega_c^{\ 2}}.$$

Таким образом, сформулируем следующий пошаговый алгоритм для нахождения λ_c:

1. Ввод исходных данных и параметров из (3);
2. Ввод статистических (наблюдений) данных
   $x_0 = \left[P_1^{0i},\ Q_1^{0i},\ P_2^{0i},\ Q_2^{0i},\ \ldots\ ,P_n^{0i},\ Q_n^{0i},\ P_{n+1}^{0i},\ Q_{n+1}^{0i},\ \ldots\ ,P_{2n}^{0i},\ Q_{2n}^{0i}\right]'$
   и дебита $\widetilde{Q}_{2n}^{i}$ из практики для одной и той же скважины, $i=\overline{1,N}$,
   где N число испытаний;
3. Определение матриц (6);
4. Составление целевого функционала $f(a_2(\lambda_c))$ (8);
5. Находится решение уравнения (9) с помощью метода золотого сечения [6] в интервале [-89.8158, -89.6288]. Для достаточно малого

числа ε проверяем условие $\left|\frac{\partial f(a_2(\lambda_c))}{\partial a_2(\lambda_c)}\right| < \varepsilon$, а также условие $\left|\frac{\partial^2 f(a_2(\lambda_c))}{\partial a_2^2(\lambda_c)}\right| > 0$, которые определяют точки глобального минимума: если оно удовлетворяется, то вычисления прекращаются, иначе переходим к шагу 3.

Остановимся на реализации предложенного выше алгоритма на примере из работы [4]. После применения предложенного алгоритма получим, $\lambda_c = 0.2357157$. Здесь $\tilde{\lambda}_c = 0.23$, где $\tilde{\lambda}_c$ значения гидравлического сопротивления из практики. Отметим, что λ_c отличается от $\tilde{\lambda}_c$ с точностью до 10^{-3}, $\left\|\lambda_c - \tilde{\lambda}_c\right\| \le 10^{-3}$, т.е. что показывает эффективность предлагаемого алгоритма.

3. Заключение

Для решения поставленной обратной задачи оптимизации составляется квадратичный функционал, построенный на основе статистических данных, и это позволяет определить коэффициент гидравлического сопротивления λ_c.

Литература

1. Aliev F.A., İsmailov N.A., İnverse Problem to Determine the Hydroulic Resistance Coeffficient in the Gaslift Process, Appl. Comput. Math., Vol.12, No.3, 2013, pp.306-313.
2. Aliev F.A., Ismailov N.A., Mukhtarova N.S., Algorithm to determine the optimal solution of a boundary control problem, Automation and Remote Control, Vol.76, No.4, 2015, pp.97-104.
3. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A., Asymptotic method for finding the coefficient of hydraulic resistance in lifting of fluid on tubing, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, Vol.23, No.5, 2015, pp.511-518.
4. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Askerov I.M., Raguimov I.S., Asymptotic Method of Solution for a Problem of Construction of Optimal Gas-Lift Process Modes, Mathematical Problems in Engineering, Vol.2010, 2010, 10p.
5. Altshul A.D., Hydraulic Resistance, M: Nedra, 1970, 216 p.
6. Himmebblau D.M., Applied Nonlinear Programming, New-York: Craw-Hill Book Company, 1972, 536p.

7. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А., Моделирование работы газлифтной скважины, Доклады НАНА, No.4, 2008, с.107-116.
8. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б., Задачи моделирования и оптимальной стабилизации газлифтного процесса, Прикладная механика, т.46, No.6, 2010, с.113-123.
9. Алиев Ф.А., Исмайлов Н.А., Алгоритм вычисления коэффициента гидравлического сопротивления в газлифтном процессе, Доклады НАН Азербайджана, No.1, 2014, с.19-22.
10. Барашкин Р.Л., Моделирование движения газожидкостной смеси в насосно-компрессорных трубах газлифтной скважины, Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности, No.5, 2011, с.41-46.
11. Барашкин Р.Л., Самарин И.В., Моделирование режимов работы газлифтной скважины, Известия Томского политехнического университета, т.309, No.6, 2006, с.42-45.
12. Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г., Прямой метод решения задач оптимального управления с быстрыми и медленными движениями, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1985, № 3, с.147-152.
13. Мирзаджанзаде А.Х., Ахметов И.М., Хасаев А.М., Гусев В.И., Технология и техника добычи нефти, М.: Недра, 1986, 382с.
14. Чарный И.А., Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах, М.: Гостехиздат, 1951, 296с.
15. Штеренлихт Д.В., Гидравлика, М: Колос, 2005, 655с.
16. Шуров В.И., Технология и техника добычи нефти, М.: Недра, 1983, 510 с.

Qazlift prosesində hidravlik müqavimət əmsalinin tapilmasi üçün identifikasiya məsələsinin həlli alqoritmi

N.S. Muxtarova

XÜLASƏ

Qazlift üsulu ilə neftin çıxarılması məsələsinin riyazi modeli nəzərdən eçirilmişdir,bu zaman qaz və qaz-maye qarışığının hərəkət tənlikləri xüsusi törəməli hiperbolik tip diferensial tənliklər sistemi vasitəsilə təsvir olunur. Düz xətlər üsulu vasitəsilə uyğun hiperbolik tip tənlik qaz, qaz-maye qarışığı və təzyiqə nəzərən xətti adi diferensial tənliklər sisteminə gətirilir. λ_c hidravlik müqavimət əmsalının təyini üçün hər bir quyu üçün statistik verilənlərdən istifadə olunur (halqavari fəzanın ağzında vurulan qazın və borunun sonunda qaz-maye qarışığının həcmi). Bu verilənlərin əsasında hidravlik müqavimət əmsalını hesablamaq üçün kvadratik funksional və bu funsionalın qradienti qurulur. Konkret misal üzərində hidravlik müqavimət əmsalının statistik qiyməti ilə $\tilde{\lambda}_c$ alınmış hidravlik muqavimət əmsalının qiyməti λ_c müqayisə olunur və göstərilir $\tilde{\lambda}_c$ -dan tərtib ilə fərqlənir.

Açar sözlər: qazlift, qaz-maye qarışığı, hidravlik müqavimət əmsalı, funksionalın qradienti.

Algorithm to solution the identification problem for finding the coefficient of hydraulicnresistance in gas-lift proceses

N.S. Mukhtarova

ABSTRACT

A mathematical model of the process of gas-lift in the oil production is considered. In this process the motions of gas and gas-liquid mixture (GLM) in annular space and in the lift are described by the system of partial differential equations of hyperbolic type. Applying the straight line method the initial problem is reduced to the system of ordinary differential equations relatively to the volume of gas, gas liquid mixture and their pressures. To determine the coefficient of hydraulic resistance λ_c statistical data for the fixed well is used (volume of injected gas at the wellhead of the annular space and GLM at the end of lift) and on the basis of these results, constituting the corresponding functional, the functional gradient is derived that allows one to calculate λ_c. On the concrete example the statistical value of the coefficient of hydraulic resistance $\tilde{\lambda}_c$ and the new value of the coefficient of hydraulic resistance λ_c are compared, it is shown that λ_c - differs from the real $\tilde{\lambda}_c$ on the order of 10^{-3}

Keywords: gas-lift, gas-liquid mixture, the coefficient of hydraulic resistance, the functional gradient.